

IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE ET DE LA CHALEUR SPECIFIQUE DANS LES EQUATIONS DE DIFFUSION NON LINEAIRES

BERNARD HENRI CAUSSADE

INP-ENSEEIH, Institut de Mécanique des Fluides Laboratoire associé au CNRS, 2, rue Charles Camichel,
31071 Toulouse Cedex, France

et

GUY RENARD

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur du CNRS, B.P. No. 30, 91406
Orsay, France

(Reçu le 27 Août 76)

Résumé—Dans un article précédent, on a proposé une méthode hybride qui associe un ordinateur à un réseau de résistances et de capacités pour résoudre les problèmes régis par l'équation non linéaire de la chaleur. Si cette méthode semble mieux adaptée que ses concurrentes à la résolution de ce type de problème, le système hybride basé sur ce principe s'avère être aussi un outil très performant pour identifier les paramètres non linéaires qui apparaissent dans ces mêmes équations. Après avoir établi les principes d'identification hybride pour la conductivité thermique et la chaleur spécifique, on applique la méthode au cas du cuivre. Une plage de basses températures est considérée afin que les caractéristiques thermophysiques du cuivre varient fortement avec la température. Les résultats de l'identification sont comparés avec des mesures expérimentales.

NOTATIONS

x ,	variable d'espace [m];
L ,	longueur [m];
t ,	variable de temps [s];
τ ,	borne supérieure du domaine d'évolution de la variable temps;
Δ ,	opérateur Laplacien;
T ,	température [K];
T_0 ,	température initiale du mur;
T_1 ,	température de la face d'entrée;
λ ,	conductivité thermique [J/ms °C];
c ,	chaleur spécifique [J/kg °C];
ρ ,	masse spécifique [kg/m ³];
k ,	$= (T_1 - T_0)/T_0$, paramètre de perturbation;
Φ ,	potentiel de Kirchhoff ($d\Phi = \lambda(T) \cdot dT$);
$g(\Phi)$,	$= \rho c(\Phi)/\lambda(\Phi)$, fonction qui est l'inverse d'une diffusivité mais qui peut être quelconque;
Φ' ,	potentiel au noeud du réseau [V];
Λ ,	rapport des échelles de temps analogique et de temps réel;
R ,	résistance du réseau [Ω];
C ,	capacité du réseau [F];
ε ,	$= \Phi' - \Phi$ différence entre réponse réseau et solution du problème au noeud considéré;
$\bar{\Delta}$,	opérateur de différences secondes;
δt ,	durée de la tranche de temps [s];
δx ,	pas du réseau [m];
Φ_t ,	solution à l'instant t ;
$\Phi_{t+\delta t}$,	solution à l'instant $t + \delta t$;
$\Phi'_{t+\delta t}$,	réponse du réseau à l'instant $t + \delta t$;
ω ,	coefficient de convergence.

I. INTRODUCTION

CONDUCTIVITÉ thermique et chaleur spécifique sont des paramètres qui jouent un rôle très important dans les transferts thermiques. Si nous prenons l'exemple des métaux ou des plastiques, leur utilisation pratique de plus en plus diversifiée (surtout dans le cas de ces derniers) dans des conditions d'emploi quelquefois sévères, ne peut se concevoir qu'à partir de la connaissance de leurs caractéristiques thermophysiques.

Ces paramètres sont généralement mesurés expérimentalement avec les difficultés que cela comporte dès que l'on s'intéresse à des plages de hautes ou basses températures. Différentes méthodes ont été mises au point et donnent lieu encore à l'heure actuelle à des études afin d'améliorer la précision des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Devant la difficulté de mesure de ces caractéristiques et l'imprécision avec laquelle elles sont obtenues, des chercheurs se sont penchés sur le problème de leur identification.

L'identification est définie comme étant la recherche de paramètres par analyse de la réponse d'un système; on lui donne aussi le nom de "calage" ou "problème inverse". (Le problème dit "direct" étant la résolution d'une équation connaissant à tout moment la valeur des paramètres).

Les recherches ont porté sur l'identification des paramètres répartis dans les équations aux dérivées partielles en général.

Le peu de littérature dévolue à ce problème met en évidence sa complexité.

Divers auteurs ont proposé des méthodes dont certaines sont d'un intérêt très limité [1-3] puisqu'elles ne permettent que l'identification de paramètres fonc-

tion des variables indépendantes (espace, temps). Nous retiendrons la méthode proposée par Chavent [4] qui permet l'identification de paramètres soit fonction des variables indépendantes, soit fonction d'une variable dépendante (température), ce qui lui confère une nette supériorité sur les précédentes puisqu'il est plus fréquent de voir les caractéristiques thermophysiques des corps, dépendre de la température que simplement des coordonnées d'espace et de temps. Cette dernière méthode, basée sur les principes variationnels, n'est cependant pas facile à mettre en oeuvre pour les non spécialistes de ce genre de technique.

Le but du présent article est de montrer comment, à partir d'un système hybride spécialement adapté à la résolution de l'équation non linéaire de la diffusion, et décrit dans un article précédent [5], il est possible, connaissant par exemple le relevé des températures en fonction du temps dans un corps géométriquement défini soumis à des conditions aux limites bien définies, d'identifier la conductivité thermique fonction de la température, connaissant la chaleur spécifique et inversement d'identifier la chaleur spécifique fonction de la température, connaissant la conductivité thermique.

Cette nouvelle méthode est appliquée à l'identification de la chaleur spécifique et de la conductivité thermique du cuivre dans une plage de températures $7 < T < 30$ K.

Nous n'avons pas utilisé un relevé expérimental des températures en fonction du temps mais les résultats de la résolution du problème "direct" à partir des caractéristiques thermophysiques connues, telle qu'elle a été envisagée dans l'article cité en référence [5]. Cette manière ne procéder permet de s'affranchir des erreurs de mesure et donc de chiffrer l'erreur introduite par la méthode proposée en comparant les résultats de l'identification avec les résultats expérimentaux.

Au travers de ces applications sont mises en évidence, d'une part la précision des résultats de l'identification qui n'est fonction que du nombre de points de relevés expérimentaux, c'est à dire de la discrétisation mais aussi la simplicité de mise en oeuvre de la méthode et sa rapidité qui tient au fait que l'on utilise un réseau analogique.

2. RAPPEL SUR LES PRINCIPES DE RESOLUTION HYBRIDE DU PROBLEME DIRECT [5]

Considérons l'équation non linéaire de la diffusion suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

où T représente la température λ la conductivité thermique et c la chaleur spécifique.

Une nouvelle fonction Φ peut être définie à partir de la transformation de Kirchhoff

$$d\Phi = \lambda(T) dT \quad (2)$$

l'équation (1) devient alors sous forme symbolique

$$\Delta \Phi = g(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3)$$

avec

$$g(\Phi) = \frac{\rho c(\Phi)}{\lambda(\Phi)} \quad (4)$$

l'équation (3) prend la forme discrétisée:

$$\Sigma(\Phi_i - \Phi) = \delta x^2 g(\Phi) \frac{d\Phi}{dt} \quad (5)$$

La méthode utilise le couplage d'un ordinateur à un réseau résistances-capacités (RC) où les têtes de l'ensemble des capacités sont connectées aux noeuds correspondants du réseau résistif grâce à un interrupteur général, les pieds de l'ensemble des capacités étant à la masse.

Ce montage permet de faire évoluer le réseau RC pendant des tranches de temps de durée définie.

Le potentiel Φ' aux noeuds du réseau obéit à la relation:

$$\Sigma(\Phi'_i - \Phi') = \Lambda RC \frac{d\Phi'}{dt} \quad (6)$$

Λ étant le rapport des échelles de temps analogique et de temps réel. Pour que l'analogie puisse exister, il faudrait que les impédances R ou C varient en fonction de Φ suivant la loi $g(\Phi)$. On peut cependant résoudre l'équation proposée en considérant les évolutions de Φ et Φ' pendant une tranche de temps $t, t + \delta t$.

Au temps t les capacités sont chargées à la solution connue Φ_t du problème: $\Phi'_t = \Phi_t$. Au temps $t + \delta t$, le réseau présente l'état $\Phi'_{t+\delta t}$ à partir duquel il s'agit de calculer la solution $\Phi_{t+\delta t}$ du problème.

En appelant ε la différence entre Φ' et Φ :

$$\Phi' = \Phi + \varepsilon(x, t) \quad (7)$$

et en considérant les équations (5), (6) et (7), nous obtenons pour tout instant de la tranche de temps

$$\Lambda RC d\Phi' = \bar{\Delta} \varepsilon dt + \delta x^2 g(\Phi) d\Phi \quad (8)$$

où $\bar{\Delta}$ représente l'opérateur de Laplace discrétisé.

Intégrons (8) entre t et $t + \delta t$; pour un noeud i nous obtenons:

$$\Lambda RC (\Phi'_{i,t+\delta t} - \Phi_{i,t}) = \delta x^2 \int_{\Phi_{i,t}}^{\Phi_{i,t+\delta t}} g(\Phi) d\Phi + \int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon dt \quad (9)$$

Au temps $t + \delta t$, une fois lue la réponse Φ' du réseau tout est connu dans (9) sauf ε .

En faisant l'approximation:

$$\int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon dt \approx \frac{1}{2} \bar{\Delta} \varepsilon_{i,t+\delta t} \delta t \quad (10)$$

il est possible de calculer $\varepsilon_{t+\delta t}$ donc $\Phi_{t+\delta t}$ grâce à un algorithme numérique itératif. Les valeurs $\Phi_{t+\delta t}$ deviennent les nouvelles conditions initiales répétées jusqu'à couvrir tout le temps intéressant le phénomène.

3. PROCESSUS D'IDENTIFICATION DE LA CHALEUR SPECIFIQUE [6]

3.1. Position du problème

Considérons l'équation (1), on suppose que l'on a les relevés expérimentaux de T en n noeuds i entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$ par tranches de temps δt :

$$T_{i,0}, T_{i,\delta t}, \dots, T_{i,t}, T_{i,t+\delta t}, \dots, T_{i,\tau}$$

et que l'on connaît $\lambda(T)$ et ρ mais non $c(T)$.

3.2. Principe de la méthode

Nous avons vu qu'après application de la transformation de Kirchhoff, l'équation (1) peut se mettre sous la forme de l'équation (3). Le problème posé revient à la détermination du paramètre $g(\Phi)$, défini par l'équation (4), puisque ρ et λ sont connus.

Considérons la tranche de temps $(t, t + \delta t)$. A partir de la transformation de Kirchhoff, équation (2), il est aisé de déterminer la suite des $\Phi_{i,t}$ à partir de la suite des $T_{i,t}$ et de $\lambda(T)$. Le calculateur hybride permet de déterminer les quantités $\Phi'_{i,t+\delta t}$ par imposition des $\Phi_{i,t}$ comme conditions initiales de la tranche de temps considérée. Compte tenu des principes de la méthode hybride à réseau RC exposés au paragraphe 2, à l'instant $t + \delta t$ toutes les quantités sont donc connues dans la relation (9) excepté $g(\Phi)$ qui est le paramètre que l'on cherche à déterminer.

Le relation (9) écrite sous la forme suivante:

$$\int_{\Phi_{i,t}}^{\Phi_{i,t+\delta t}} g(\Phi) d\Phi = \frac{\Lambda RC}{\delta x^2} (\Phi'_{i,t+\delta t} - \Phi_{i,t}) - \frac{\delta t}{2\delta x^2} \bar{\Delta} \varepsilon_{i,t+\delta t} \quad (11)$$

montre que $g(\Phi_{i,t+\delta t})$ peut être calculé à une constante près à partir d'une méthode numérique d'intégration approchée. Ces opérations sont répétées pour toutes les tranches de temps où l'on connaît les relevés expérimentaux de T .

Une fois que $g(\Phi)$ est connu, il est aisé d'en déduire $c(\Phi)$ donc $c(T)$.

On peut aussi déterminer $g(\Phi)$ en exprimant ce paramètre sous forme polynomiale.

Posons que g est un polynôme de degré $(n-1)$ en Φ :

$$g(\Phi) = x_1 + 2x_2\Phi + 3x_3\Phi^2 + \dots + nx_n\Phi^{n-1} \quad (12)$$

où n représente toujours le nombre de noeuds de relevés expérimentaux.

D'après (11), pour un noeud i nous avons entre les instants 0 et τ :

$$\int_{\Phi_{i,0}}^{\Phi_{i,\tau}} g(\Phi) d\Phi = \frac{\Lambda RC}{\delta x^2} \left[\sum_{t=0}^{t=\tau-\delta t} \Phi'_{i,t+\delta t} - \sum_{t=0}^{t=\tau-\delta t} \Phi_{i,t} \right] - \frac{\delta t}{2\delta x^2} \sum_{t=0}^{t=\tau-\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon_{i,t+\delta t} \quad (13)$$

Posons le second membre de l'équation (13) qui est connu, égal à b_i . Intégrons l'équation (13) après avoir remplacé $g(\Phi)$ par l'expression polynomiale (12), il

vient:

$$x_1[\Phi_{i,\tau} - \Phi_{i,0}] + x_2[\Phi_{i,\tau}^2 - \Phi_{i,0}^2] + \dots + x_n[\Phi_{i,\tau}^n - \Phi_{i,0}^n] = b_i \quad (14)$$

Ce qui pour l'ensemble des n noeuds i donne le système linéaire:

$$[\Phi_{i,\tau}^j - \Phi_{i,0}^j] \cdot [x_j] = [b_i] \quad (15)$$

dont la résolution par voie numérique fournit les coefficients de $g(\Phi)$ donné par la relation (12).

4. PROCESSUS D'IDENTIFICATION DE LA CONDUCTIVITE [7]

4.1. Position du problème

Considérons l'équation (1), on suppose que l'on connaît les relevés expérimentaux de T en n noeuds i entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$ par tranches de temps δt :

$$T_{i,0}, T_{i,\delta t}, \dots, T_{i,t}, T_{i,t+\delta t}, \dots, T_{i,\tau}$$

et que cette fois ci on connaît $c(T)$ et ρ mais non $\lambda(T)$.

4.2. Principe de la méthode

La transformation de Kirchhoff:

$$\lambda(T) dT = d\Phi \quad (16)$$

permet de mettre l'équation (1) sous la forme de l'équation (3). L'équation (16) montre que la connaissance de Φ permet de retrouver le paramètre $\lambda(T)$ puisque T est une donnée de problème. Dans un premier temps il s'agit donc de trouver la suite des Φ_i à partir de la suite des T_i , compte tenu des principes de la méthode hybride à réseau RC exposés au paragraphe 2, et des relations (16) et (4), la relation (8) peut s'écrire:

$$\frac{\Lambda RC}{\delta x^2} d\Phi' - \bar{\Delta} \varepsilon \frac{dT}{\delta x^2} = g(\Phi) d\Phi = \rho c(T) dT \quad (17)$$

Considérons la tranche de temps $(t, t + \delta t)$ pour laquelle $\Phi_{i,t}$ est supposé connu et $\Phi_{i,t+\delta t}$ à trouver. Le calculateur hybride permet de déterminer les quantités $\Phi'_{i,t+\delta t}$ par imposition des $\Phi_{i,t}$ comme conditions initiales de la tranche de temps considérée. Intégrons la relation (17) pour un noeud entre t et $t + \delta t$, il vient en tenant compte de (7):

$$\bar{\Delta} \Phi'_{i,t+\delta t} = \bar{\Delta} \Phi'_{i,t+\delta t} + \frac{2\delta x^2}{\delta t} \int_{T_{i,t}}^{T_{i,t+\delta t}} \rho c(T) dT - \frac{2\Lambda RC}{\delta t} (\Phi'_{i,t+\delta t} - \Phi_{i,t}) \quad (18)$$

Au temps $t + \delta t$ le second membre de l'expression (18) est connu; on a donc à résoudre une équation de Poisson pour calculer $\Phi_{i,t+\delta t}$ ce qui se fait aisément au moyen du réseau résistif seul.

Dans un deuxième temps, $\lambda(T)$ peut être calculé à partir de l'équation (16) par une méthode numérique d'intégration. Ces opérations sont répétées pour toutes les tranches de temps où l'on connaît les relevés expérimentaux de T .

On peut aussi déterminer $\lambda(T)$ en exprimant ce

paramètre sous forme polynomiale:

$$\lambda(T) = x_1 + 2x_2 T + 3x_3 T^2 + \dots + nx_n T^{n-1} \quad (19)$$

où n représente toujours le nombre de noeuds de relevés expérimentaux.

Intégrons (16) entre $t = 0$ et $t = \tau$ pour le noeud i , en tenant compte de (19), il vient:

$$x_1[T_{i,0} - T_{i,\tau}] + x_2[T_{i,0}^2 - T_{i,\tau}^2] + \dots + x_n[T_{i,0}^n - T_{i,\tau}^n] = \Phi_{i,\tau} - \Phi_{i,0} \quad (20)$$

ce qui, pour l'ensemble des n noeuds i donne le système linéaire:

$$[T_{i,\tau}^j - T_{i,0}^j] \cdot [x_j] = [\Phi_{i,\tau} - \Phi_{i,0}] \quad (21)$$

dont la résolution numérique fournit les coefficients de $\lambda(T)$ donné par la relation (19).

5. MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE LA METHODE D'IDENTIFICATION

Cette méthode qui est basée sur l'utilisation d'un calculateur hybride à réseau est de ce fait très performante sur le plan de la vitesse de calcul. Le réseau RC fournit immédiatement la réponse à l'imposition des conditions initiales comme cela est nécessaire dans les deux processus d'identification exposés. Dans le cas du deuxième processus, le réseau R seul se charge du calcul de l'équation de Poisson. (Nous avons montré dans l'article [5] que le calculateur hybride de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse peut travailler avec le réseau RC dans la boucle ou avec le réseau R seul.) Les tâches dévolues à l'ordinateur, qui rentre dans la boucle hybride, sont outre le pilotage de l'interface, le calcul des intégrations ou la résolution d'un système linéaire suivant la procédure utilisée pour l'identification et qui sont des opérations simples et rapides à effectuer.

Mais cette méthode peut être utilisée sur un ordinateur seul. En effet, il est possible d'une part de simuler numériquement un réseau et cette opération revient à résoudre l'équation (6), d'autre part de résoudre une équation de Poisson et ceci se fait à partir de méthodes numériques classiques itératives.

La solution qui consiste à simuler le réseau confère à la méthode des possibilités d'application très larges et de ce fait permet de justifier une relative perte de temps vis à vis de la solution hybride pure.

Dans les deux processus d'identification qui ont été exposés, il est possible d'accroître systématiquement la précision du calcul lorsque l'on recherche le paramètre sous forme polynomiale.

Prenons comme exemple la recherche de la conductivité thermique, la transposition à l'autre paramètre est immédiate. Revenons en effet à l'équation (1) dans laquelle λ est supposée être la valeur exacte et appelons λ_1 la valeur trouvée par le calcul fait au paragraphe 4.2.

On a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_1(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda_1(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \rho c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + r_1 \quad (22)$$

où r_1 est le terme d'erreur.

Soustrayons (22) de (1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda_1 - \lambda) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda_1 - \lambda) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] = r_1 \quad (23)$$

et appliquons à l'équation (23) la transformation de Kirchhoff définie par:

$$(\lambda_1 - \lambda) dT = d\Phi_1 \quad (24)$$

qui donne l'équation de Poisson:

$$\Delta \Phi_1 = r_1 \quad (25)$$

que l'on résout une seule fois au temps τ au moyen de réseau résistif ou numériquement.

Exprimons $(\lambda_1 - \lambda)$ sous forme polynomiale, comme pour λ précédemment:

$$\lambda_1 - \lambda = \delta x_1 + 2\delta x_2 T + \dots + n\delta x_n T^{n-1}. \quad (26)$$

En intégrant entre 0 et τ , on a pour l'ensemble des noeuds i , un système linéaire du même type que (21) dont la résolution permet de calculer les coefficients d'une seconde approximation de λ .

$$\lambda_2 = (x_1 - \delta x_1) + 2(x_2 - \delta x_2)T + \dots + n(x_n - \delta x_n)T^{n-1}. \quad (27)$$

Ce calcul d'erreur peut être répété autant de fois qu'il est nécessaire pour atteindre la précision recherchée.

6. APPLICATIONS

6.1. Position du problème

Comme exemples d'application nous avons choisi de rechercher les lois de conductivité thermique et de chaleur spécifique du cuivre dans une plage de basses températures. Cette plage a été choisie de telle sorte que les variations des paramètres thermophysiques soient importantes.

Afin de pouvoir comparer les résultats de l'identification avec les résultats expérimentaux, nous avons repris le problème qui a fait l'objet d'une résolution directe dans l'article cité en référence [5]. Nous possédons ainsi les lois de variation expérimentales des paramètres que nous cherchons à identifier.

On considère un mur de cuivre d'épaisseur L . Ce mur initialement porté à un niveau de température uniforme T_0 subit sur l'une de ses faces un échelon de température $(T_1 - T_0)$ tandis que l'autre face est maintenue au niveau T_0 .

En admettant que les isothermes sont des sections droites parallèles aux faces du mur, il s'agit de déterminer d'une part la chaleur volumique $\rho c(T)$ connaissant la conductivité thermique et la loi d'évolution des températures $T(x_0, t)$ en tout plan d'abscisse x_0 tel que $0 < x_0 < L$ et d'autre part la conductivité thermique $\lambda(T)$ connaissant la chaleur spécifique et la loi d'évolution des températures comme précédemment.

Le problème ainsi défini peut être considéré comme unidimensionnel et réponds en valeurs adimension-

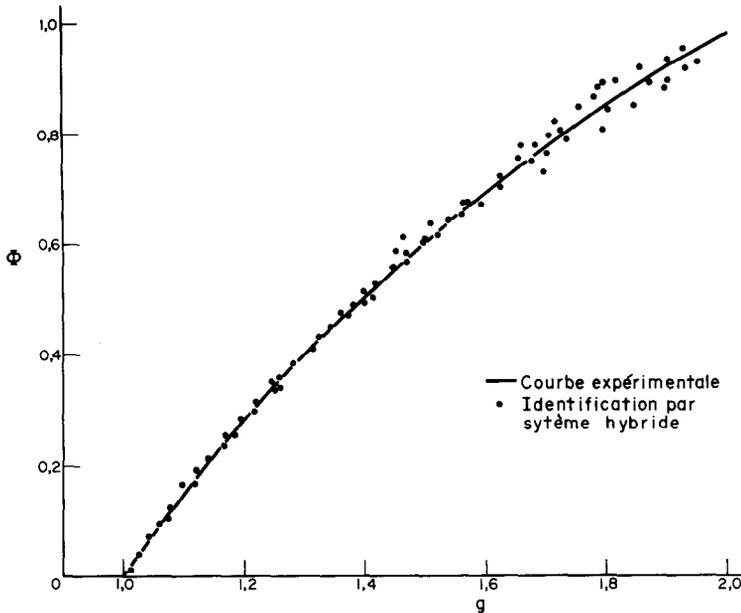


FIG. 1. Identification du paramètre $g(\Phi)$ par intégration numérique de l'équation (11).

nelles au système d'équations suivant:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \rho c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0, t) = 1, \quad T(1, t) = 0 \quad (28)$$

Le domaine des températures envisagé est: $7 < T < 30$ K. Des mesures expérimentales récentes sur le cuivre ont montré que pour un paramètre de perturbation k tel que:

$$k = \frac{T_1 - T_0}{T_0} = 0.2 \quad (T_1 = 12 \text{ K}; T_0 = 10 \text{ K})$$

Son comportement thermique est défini par les approximations paraboliques suivantes:

pour $7 < T < 14$ K

$$\lambda = 1 - 0,00252 kT - 0,892 \cdot k^2 \cdot T^2$$

faible variation de λ

$$1/\rho C = 1 - 3,11 kT + 3,40 k^2 \cdot T^2$$

forte variation de C

pour $14 < T < 30$ K

$$\lambda = 1 - 1,907 kT + 1,602 k^2 \cdot T^2$$

forte variation de λ

$$1/\rho C = 1 - 3,67 kT + 4,79 k^2 \cdot T^2$$

faible variation de C .

Dans le but de pouvoir chiffrer l'erreur introduite par la méthode d'identification nous avons utilisé comme relevés des températures aux différents points du domaine les résultats de la résolution du problème direct tel qu'il a été envisagé dans l'article cité en référence [5].

Nous connaissons donc la suite des $T(x, t)$ entre $t = 0$ et $t = 0,009$ tels que:

δx : pas de discrétisation = 0.01

δt : durée de la tranche de temps = $3 \cdot 10^{-4}$.

6.2. Recherche de la chaleur volumique

Dans une première étape nous avons identifié le paramètre ρC dans le cas d'une forte variation de celui-ci, par simple intégration numérique de l'équation (11). La Fig. 1 permet de comparer les résultats de l'identification avec les résultats expérimentaux. Nous avons porté sur cette figure les évolutions du paramètre $g(\Phi)$, il est aisé de remonter au paramètre $\rho C(T)$. Si on fait passer une courbe au travers du nuage de points de calcul, on s'aperçoit qu'elle est quasiment superposée à la courbe expérimentale.

La dispersion des points de calcul provient d'ailleurs de la présence d'une condition en forme d'échelon à la limite du domaine, ce qui constitue un des cas les plus difficiles du point de vue de la précision des résultats. On est en droit d'attendre une dispersion moins grande dans le cas de conditions aux limites moins difficiles.

Dans une deuxième étape nous avons exprimé le paramètre sous forme polynomiale, en recherchant un polynôme de même degré que celui qui exprime les résultats expérimentaux. La Fig. 2 permet de constater que les deux courbes ainsi obtenues sont en parfaite concordance.

6.3. Recherche de la conductivité thermique

Dans le cas d'une forte variation de la conductivité, nous avons vu qu'à partir des relevés expérimentaux, λ

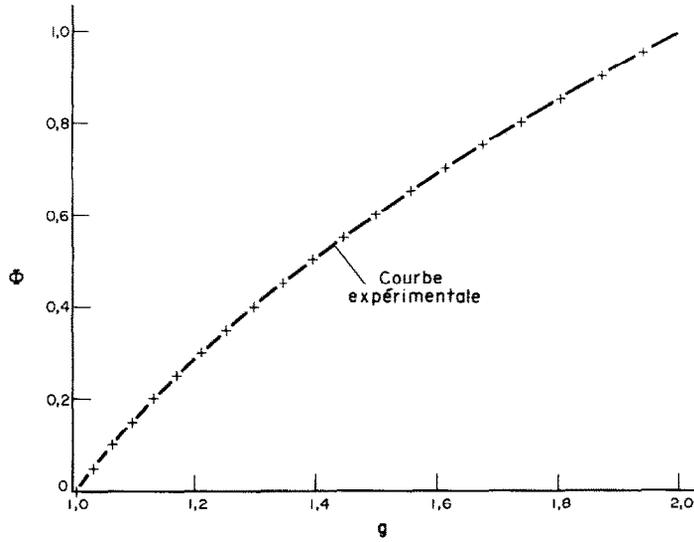


FIG. 2. Identification du paramètre $g(\Phi)$. Polynôme de degré 2.

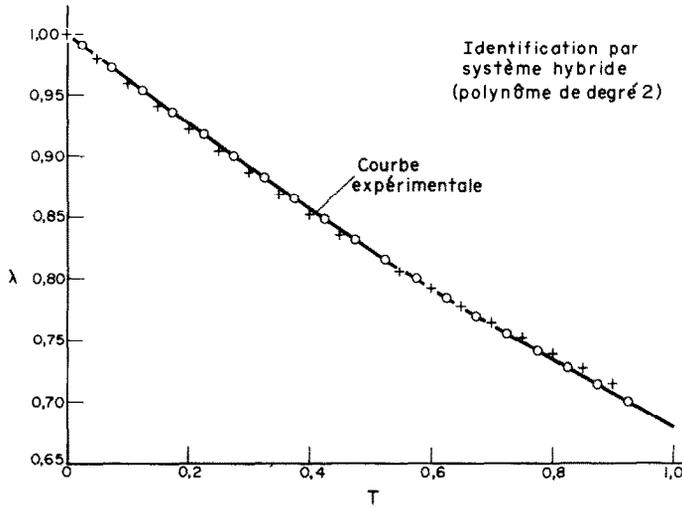


FIG. 3. Identification de la conductivité thermique dans le cas d'une forte variation de celle ci. Polynôme de degré 2. +, sans calcul d'erreur; O, avec deux calculs d'erreur.

pouvait être exprimé par un polynôme de degré 2:

$$\lambda = 1 - 0,3814 T + 0,06408 T^2.$$

Par application de la méthode hybride, ce polynôme est retrouvé comme suit:

sans calcul d'erreur

$$\lambda = 1 - 0,4073 T + 0,10351 T^2$$

avec un calcul d'erreur

$$\lambda = 1 - 0,3817 T + 0,06428 T^2$$

avec deux calculs d'erreur

$$\lambda = 1 - 0,3815 T + 0,06411 T^2$$

On constate que la méthode hybride après deux calculs d'erreur permet de retrouver le polynôme avec une très grande précision.

Tableau 1. Résultats obtenus pour la conductivité, dans le cas d'une forte variation de celle ci, avec les méthodes suivantes: A—Expérimentale; B—Hybride sans calcul d'erreur; C—Hybride avec un calcul d'erreur; D—Hybride avec deux calculs d'erreur

T	A	B	C	D
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9625	0,9603	0,9627	0,9625
0,2	0,9263	0,9227	0,9265	0,9263
0,3	0,8913	0,8871	0,8915	0,8913
0,4	0,8577	0,8536	0,8578	0,8576
0,5	0,8253	0,8222	0,8254	0,8253
0,6	0,7942	0,7928	0,7943	0,7942
0,7	0,7644	0,7656	0,7645	0,7644
0,8	0,7359	0,7404	0,7360	0,7359
0,9	0,7086	0,7172	0,7087	0,7086

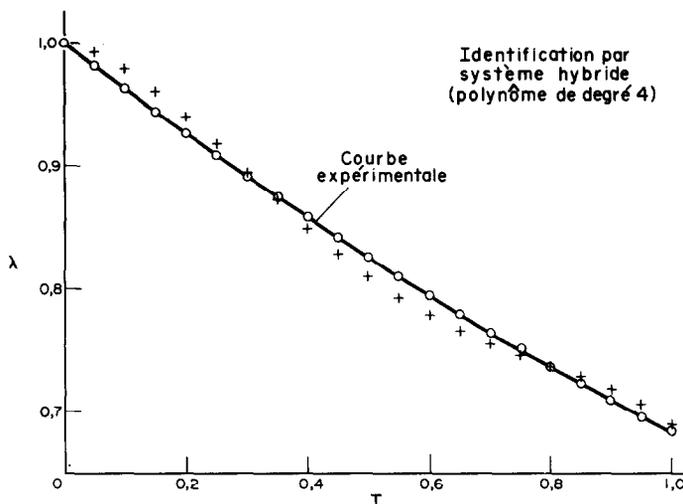


FIG. 4. Identification de la conductivité thermique dans le cas d'une forte variation de celle ci. Polynôme de degré 4. +, sans calcul d'erreur, o, avec un calcul d'erreur.

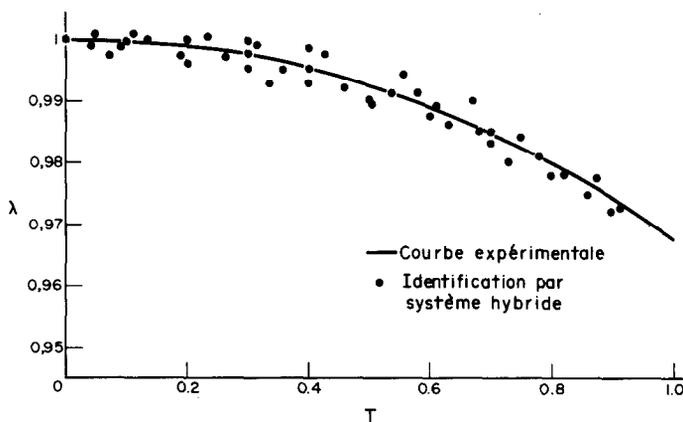


FIG. 5. Identification de la conductivité thermique, dans le cas d'une faible variation de celle ci, par intégration numérique de l'équation (16).

Le Tableau 1 permet de juger des écarts entre les résultats expérimentaux et les résultats hybrides. La Fig. 3 montre les évolutions de λ en fonction de T .

La Fig. 4 montre les résultats obtenus par la méthode hybride avec un polynôme du 4^e degré sans calcul d'erreur; on voit une nette divergence avec les résultats expérimentaux. L'application d'un calcul d'erreur améliore très nettement l'expression du polynôme puisque nous avons pratiquement concordance avec la courbe expérimentale, ce qui montre l'efficacité du procédé.

Dans le cas d'une faible variation de la conductivité nous avons identifié ce paramètre par simple intégration de l'équation (16). La Fig. 5 montre que nous obtenons un nuage de points et on s'aperçoit que, si nous faisons passer une courbe à travers de ces points, elle est quasiment superposée à la courbe expérimentale.

A partir des relevés expérimentaux λ peut être

exprimé par un polynôme de degré 2.

$$\lambda = 1 - 0,000504 T - 0,03568 T^2.$$

Par application de la méthode hybride, ce polynôme est retrouvé comme suit:

Sans calcul d'erreur

$$\lambda = 0,9977 + 0,006108 T - 0,03872 T^2$$

Avec un calcul d'erreur

$$\lambda = 0,9997 + 0,000430 T - 0,03628 T^2$$

Le Tableau 2 permet de juger des écarts entre les résultats expérimentaux et les résultats hybrides. On trouve une très légère divergence pour $T = 0$; cela provient du fait que nous n'avons pas utilisé le dernier point du domaine, pour déterminer le polynôme, point pour lequel nous connaissons par hypothèse, la valeur de la conductivité. Le polynôme tel qu'il a été exprimé, ne permet donc pas, en principe, d'évaluer λ en deçà de $T = 0,1$, puisque nous sortons du domaine où il est

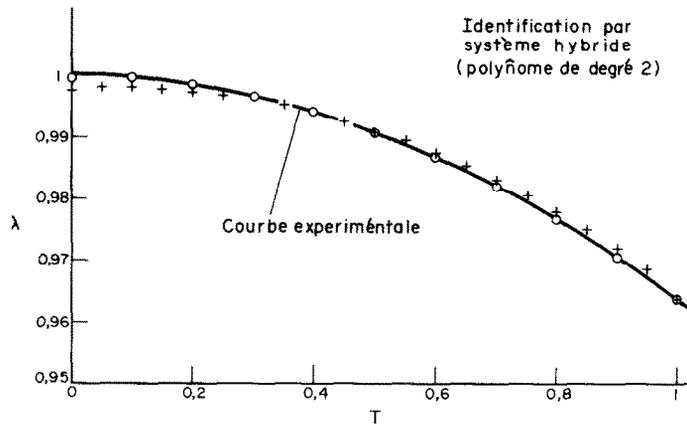


FIG. 6. Identification de la conductivité thermique dans le cas d'une faible variation de celle-ci. Polynôme de degré 2. +, sans calcul d'erreur; O, avec un calcul d'erreur.

Tableau 2. Résultats obtenus pour la conductivité, dans le cas d'une faible variation de celle-ci, avec les méthodes suivantes: A—Expérimentale; B—Hybride sans calcul d'erreur; C—Hybride avec un calcul d'erreur

T	A	B	C
0,0	1,0000	0,9977	0,9997
0,1	0,9996	0,9979	0,9994
0,2	0,9985	0,9973	0,9984
0,3	0,9966	0,9960	0,9966
0,4	0,9941	0,9939	0,9941
0,5	0,9908	0,9910	0,9908
0,6	0,9869	0,9874	0,9869
0,7	0,9822	0,9830	0,9822
0,8	0,9768	0,9778	0,9768
0,9	0,9706	0,9718	0,9707
1,0	0,9638	0,9651	0,9638

représentatif. Néanmoins, cette expérience montre que le calcul d'erreur est un procédé particulièrement efficace pour améliorer les résultats de la méthode hybride d'identification.

La Fig. 6 illustre ce dernier résultat.

7. CONCLUSIONS

Nous avons montré que le calculateur hybride basé sur le principe de la liaison d'un réseau résistance-capacité avec un ordinateur est un outil très puissant pour identifier les paramètres fonction des variables dépendantes dans les équations de diffusion. Nous nous sommes intéressé ici au domaine de la thermique en identifiant la chaleur spécifique et la conductivité thermique. De plus cette méthode peut être appliquée avec un ordinateur seul en simulation, ce qui lui confère de très larges possibilités d'applications mais en sacrifiant toutefois les avantages de l'analogique, c'est à dire la rapidité des opérations qui lui sont dévolues mais aussi la facilité d'imposition des conditions aux limites.

Nous avons mis en évidence la facilité de mise en oeuvre de cette méthode ainsi que la rapidité de l'obtention des résultats. Lorsque l'on utilise le procédé d'identification qui consiste à rechercher la loi

d'évolution du paramètre sous forme polynomiale, l'identification de la fonction dans une plage donnée de variation, se réduit à l'identification de cette fonction en un nombre très limité de points; par exemple on utilise 3 points pour un polynôme de degré 2.

Au point de vue précision, nous avons montré que, si l'on s'affranchit des erreurs expérimentales de mesures sur les relevés des températures, on retrouve les lois d'évolution des paramètres avec une très grande précision. Cette précision n'est fonction que de la discrétisation dans l'espace, c'est à dire en pratique du nombre de points de relevés expérimentaux.

En conclusion, la méthode que nous proposons nous semble être une contribution intéressante à l'identification des paramètres répartis dans l'équation non linéaire de la diffusion. D'une part, par l'intérêt qu'elle présente d'une mise en oeuvre simple et d'autre part par la grande précision avec laquelle elle permet d'obtenir les résultats.

REFERENCES

1. W. H. Chen et J. H. Seinfeld, Estimation of spatially varying parameters in partial differential equations, *Int. J. Control* **15**(3) (1972).
2. W. J. Karplus et V. Vemuri, Heuristic optimization and identification in hybrid field simulation, 5th International analogue computation meeting, Lausanne 28 Août-2 Septembre (1967).
3. H. L. Garay, Y. Y. Haimes et P. Das, Distributed parameter identification of groundwater systems by non linear estimation, *J. Hydrol.* **30**, 47-61 (1976).
4. G. Chavent, Une méthode de résolution de problème inverse dans les équations aux dérivées partielles, *Bull. l'Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech.* **18**(3), 122-125 (1970).
5. B. H. Caussade, Contribution à la résolution de l'équation non linéaire de la diffusion, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 303-311 (1976).
6. B. H. Caussade et G. Renard, Identification de paramètres non linéaires par système hybride, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **281A**, 1063-1066 (1975).
7. B. H. Caussade et G. Renard, Identification hybride du paramètre de conductivité dans les équations de diffusion non linéaires, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **282A**, 1117-1119 (1976).

IDENTIFICATION OF THERMAL CONDUCTIVITY AND SPECIFIC HEAT IN NON LINEAR DIFFUSION EQUATIONS

Abstract—In a previous paper we have presented a hybrid method based on the linking of a resistance capacitance network and a digital computer for solving problems governed by the non linear diffusion equation. If the method seems to be more suitable than others to the resolution of this kind of problem, the hybrid system based on this principle is also a powerful tool for the identification of parameters which appear in these same equations.

We applied the method to copper after the laying down of hybrid identification principles for the thermal conductivity and the specific heat. A range of lower temperatures is considered in order to copper thermophysical properties change highly with the temperature. The results of the identification are compared with those given by experimental measurements.

IDENTIFIZIERUNG DER WÄRMELEITFÄHIGKEIT UND DER SPEZIFISCHEN WÄRMEKAPAZITÄT IN NICHT LINEAREN WÄRMELEITUNGSGLEICHUNGEN

Zusammenfassung—In einem vorherigen Artikel wurde eine Hybrid-Methode vorgeschlagen, bei welcher ein Digitalrechner mit einem Netz von Widerständen und Kapazitäten verbunden wird; diese Methode eignet sich zur Lösung nicht linearer Wärmeleitprobleme. Wenn diese Methode geeigneter als andere zur Lösung solcher Probleme ist, dann empfiehlt sich das auf diesem Prinzip beruhende Hybridsystem auch zur Identifizierung der in denselben Gleichungen auftretenden Parameter.

Nach Aufstellen der hybriden Identifizierungsgrundlagen für das Wärmeleitvermögen und für die spezifische Wärmekapazität wurde die Methode auf Kupfer angewandt. Es wurde der Bereich tieferer Temperaturen betrachtet, in dem die thermophysikalischen Eigenschaften von Kupfer stark temperaturabhängig sind.

Die Ergebnisse dieser Berechnung wurden mit Meßwerten verglichen.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОЁМКОСТИ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФфуЗИИ

Аннотация — В предыдущей работе нами был предложен комбинированный метод решения задач, описываемых нелинейным уравнением диффузии, основанным на одновременном использовании контура ёмкость — сопротивление и цифровой вычислительной машины. Поскольку данный метод оказывается более подходящим по сравнению с другими для решения задач этого типа, то и основанная на нем комбинированная система также является мощным средством определения параметров, входящих в эти же уравнения. Предложенным методом определялись теплопроводность и теплоёмкость меди. Рассматривался диапазон низких температур, где температурная зависимость теплофизических свойств меди проявляется наиболее сильно. Дано сравнение результатов метода с данными экспериментов.